1 Met behulp van volledige inductie

① bewijs dat de stelling klopt voor de kleinste n ($n=5$)

$5^2 = 25$ $\quad 2^5 = 32$

$25 < 32$ dus voor de kleinste n klopt het

② Stel dat de stelling klopt voor $n=k$, laat dan zien dat het klopt voor $n=k+1$

$k^2 < 2^k$ (aanname)

te bew

$(k+1)^2 < 2^{k+1}$

$(k+1)^2 = k^2+2k+1$

$2^{k+1} = 2^k \cdot 2$

1½

dus $k^2+2k+1 \overset{?}{<} 2^k \cdot 2$

~~$k^2 < 2^k$ dus $2k+1 < 2^k$ nog te bewijzen~~

~~$(2k+1)' = 2$ $\quad 2k+1 = 2^1 k + 2^0 < 2^k$~~

~~$(2^k)' = \ln(2)\, 2^k$~~

~~$(2k+1)' = 2$~~

~~$(2^k)' = \ln(2)\, 2^k$~~

~~$2^{k-1}\ln(2) = 2$~~

Geg: $2k^2 < 2 \cdot 2^k$

~~$2^{k-1} = \frac{2}{\ln(2)}$~~

~~$k = {}^2\log\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$~~

je wilt: $k^2+2k+1 < 2\cdot 2^k$

~~$k = 1 + {}^2\log\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$~~

~~vanaf $k = 1 + {}^2\log\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$ stijgt 2^k sneller dan~~

Dit zou kloppen als

$2k^2 < 2\cdot 2^k$ $\quad k^2+2k+1 \overset{?}{\le} 2^k \cdot 2$

$k^2+2k+1 \le 2k^2$,

$-k^2+2k+1 \overset{?}{\le} 0$

dus als $-k^2+2k+1 \le 0$

$-x^2+2x+1=0$

$D = 2^2 - 4\cdot -1 \cdot 1 = 8$

$\frac{-2 \pm \sqrt{8}}{-2} = x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$

Voor $x = 1 \pm \sqrt{2}$ geldt $-x^2+2x+1 = 0$

voor $x=0$ geldt $-0^2+2\cdot 0+1 = 1 > 0$

voor $x > 1+\sqrt{2}$ geldt $-x^2+2x+1 < 0$

$1+\sqrt{2} \approx 2.41$

$k \ge 5$ dus er geldt

$-k^2+2k+1 < 0$ voor elke k en dus $(k+1)^2 > 2^{k+}$

De stelling geldt dus voor $k+1$

en voor $n=5$ (kleinste n) daarmee geldt het ook voor $n=5+1=6$ en $n=6+1=7$ enz. Dus is de stelling bewezen

2 ~~$(1+i)^n = -(1-i)^n$ tot de macht $\frac{1}{n}$~~

~~$1+i = \sqrt[n]{-1}\,(1-i)$~~

~~$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1^2+2\cdot 1\cdot i+i^2}{1^2-i+i-i^2} = \frac{2i}{1+1} =$~~

$(1+i)^n = -(1-i)^n$ tot de macht $\frac{1}{n}$

$1+i = \sqrt[n]{-1}\,(1-i)$

$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1^2+2\cdot 1\cdot i+i^2}{1^2-1\cdot i+1\cdot i-i^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$

$\frac{1+i}{1-i} = i = \sqrt[n]{-1}$ tot de macht n

$i^n = -1$ $\qquad i^2 = -1 \qquad \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$

$n = 2, 6, 10.$ enz

$n = -2, -6, -10, \ldots$ enz $\qquad \frac{1}{-1} = -1$

~~Dus voor alle even getallen n behalve~~ ~~nul~~

$i^4 = (-1)^2 = 1$

$i^6 = (-1)^3 = -1$

Dus voor $n = 2+4k$ met k een reëel geheel getal

2/

3 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ betekend dat voor elke

$0 < x < N$ is er een ~~f(x)~~

$M < f(x)$ is zo dat $\lim_{x\to N} f(x) = M$

0

Postcode en Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Datum: Naam docent:

~~8 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ betekent: voor elke ... is er een ... zodat ... $f(x) < M$ ... $\lim_{x\to N} f(x) = M$~~

5 $g(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)}$

$g'(x) = (x\ln(x))' e^{x\ln(x)} = (\ln(x) + \frac{1}{x}\cdot x) e^{\ln(x^x)}$

$= (\ln(x)+1) x^x$

$g'(x) = 0$ in het minimum

$\ln(x)+1 = 0 \quad \vee \quad x^x = 0$

$\ln(x) = -1 \qquad x^x \neq 0$ (in $x=0$ $0^0=1$)

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

2. in minimum: $g''(x) > 0$

$g''(x) = ((\ln(x)+1) e^{x\ln(x)})'$ productregel

$= (\ln(x)+1)^2 e^{x\ln(x)} + (\ln(x)+1)' e^{x\ln(x)}$

$= (\ln(x)+1)^2 e^{\ln(x^x)} + \frac{1}{x} e^{\ln(x^x)}$

$= (\ln(x)+1)^2 x^x + \frac{1}{x} x^x$

$g''(\frac{1}{e}) = (\ln(\frac{1}{e})+1)^2 (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} + \frac{1}{\frac{1}{e}} (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$

$= (-1+1)^2 (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} + e (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$

$= 0 + e(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$

$g''(\frac{1}{e}) > 0$ want $e(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} > 0$ dus in $x=\frac{1}{e}$ heeft de functie $g(x) = x^x$ een minimum

$g(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$

minimum: $g(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$

4 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

2 $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \Big/ \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\lim_{x \to 0^+} \tanh(x) \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ln(x)$ ← vanwege $\ln(x) \to x > 0$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \ln(x)$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)}$ l'Hopital

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{\ln(x)}}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \frac{1}{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln(x)}}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ nadert tot 0 en is differentieerb

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln(x)}$ nadert tot 0 en is differentie

l'Hopital

$\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)' = \frac{(e^{2x}+1)\, 2e^{2x} - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x}+1)^2}$

$= \frac{2 \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)' = \left(\frac{1}{u}\right)'$ met $u = \ln(x)$

$\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln^2(x)}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)} \cdot \ln(x)$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)} = \frac{\lim_{x \to 0^+} \ln(x)}{\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)}$

l'Hopital toepassen: $\lim_{x \to 0^+} \ln(x)$ nadert tot oneindig en is differentieerba

$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ nadert tot oneindig en is differentie

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$

Postcode en Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Datum: Naam docent:

(vervolg) 4) $\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\right)' = \frac{(e^{2x}+e^{-2x}-2)-(e^{2x}+e^{-2x}+2)}{(e^{x}-e^{-x})^2}$

$= \frac{-4}{(e^{x}-e^{-x})^2}$

$\cancel{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\right)} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{-4}{(e^{x}-e^{-x})^2}} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{-4} \cdot \frac{1}{x}}$

$\cancel{= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{-4}{(e^{x}-e^{-x})}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot e^{x}-e^{-x}}$

$\cancel{\lim_{x\to 0^+} 1}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-4}{(e^{x}-e^{-x})^2}}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{x}-e^{-x})^2}{-4x} = \frac{\lim_{x\to 0^+} (e^{x}-e^{-x})^2}{\lim_{x\to 0^+} (-4x)}$

l'Hopital: $\lim_{x\to 0^+} (e^{x}-e^{-x})^2$ nadert tot 0 en is differentieerbaar
$\lim_{x\to 0^+} 4x$ nadert tot 0 en is differentieerbaar

$((e^{x}-e^{-x})^2)' = (e^{2x}+e^{-2x}-2)'$
$= 2e^{2x}-2e^{-2x}$
$(-4x)' = -4$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{x}-e^{-x})^2}{-4x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{-4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{-2}$

$= 0$

(l'Hopital $|\lim_{x\to a} f(x)| = |\lim_{x\to a} g(x)| = c$ met $c = 0, \infty$ aan $\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f'(x)}{\lim_{x\to a} g'(x)}$

als $f'(x)$ en $g'(x)$ bestaan a)